代数構造

下(上)三角行列は通常の和と積で非可換環(多元環，代数)をなす。
$U, V \in \mathrm{Upper}(n)$
(i) $U + V \in \mathrm{Upper}(n)$
(ii) $UV \in \mathrm{Upper}(n)$

Rem.
積は非可換だが，対角成分のみに着目すれば可換であり，
しかもそれは対角同士の積である。
$\mathrm{diag}(AB) = \mathrm{diag}(BA) = \mathrm{diag}(A) * \mathrm{diag}(B)$

Ex.
$$\begin{pmatrix} a_1 & * & * \\ 0 & a_2 & * \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & * & * \\ 0 & b_2 & * \\ 0 & 0 & b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & * & * \\ 0 & b_2 & * \\ 0 & 0 & b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & * & * \\ 0 & a_2 & * \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1b_1 & * & * \\ 0 & a_2b_2 & * \\ 0 & 0 & a_3b_3 \end{pmatrix}$$

固有値

Th.
三角行列の固有値は，その対角成分である。
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ の固有値は 1，4，6

Schur分解

任意の正方行列は、ユニタリ相似変換によって上三角行列にすることができる。
特に，対角成分は固有値である。

$^\forall A^i n\mathrm{Mat}(n, n)^\exists U \in \mathrm{Uni}(n), {}^\exists S \in \mathrm{Upp}(n)$
$\mathrm{s.t.}\ \ A = USU^*$

i.e.
任意の正方行列は
(i) 三角化可能で、しかも
(ii) 元の行列とユニタリ相似である。
そして、三角行列の固有値はその対角成分であるから、
(iii) 元の行列の固有値は三角化さえすれば求められる。